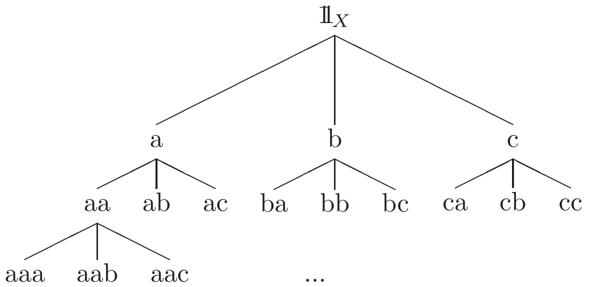
Représentation du monoïde X*

Exemple : $X = \{a, b, c\}$: $X^* = \{\mathbb{1}, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, abc...\}$.



Cette représentation du monoïde X*, sous forme d'arbre, peut inspirer plusieurs définitions d'*ordres*.

Déf. 10 (Ordre préfixiel)

Soient u et $v \in$ X*. On définit la relation d'*ordre préfixiel*, notée $<$, de la manière suivante :
$u < v \Rightarrow \exists w$ t.q. $v = uw$ (u est un préfixe de v).
N.B. : Ce n'est pas un ordre total.
Rq : Dans l'arbre, cet ordre correspond à une branche. Deux mots sont en relation d'ordre préfixiel ssi ils sont sur la même branche.

Déf. 11 (Ordre lexicographique)

Soient u et $v \in$ X*. On définit la relation d'*ordre lexicographique* («alphabétique»), notée $[$, de la manière suivante :

$$u \,[\, v \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & u < v \\ \text{ou} & \\ & \exists u_1, u_2, v_2 \in X^*, x, y \in X \\ & u = u_1 x u_2 \text{ et } v = u_1 y v_2 \\ & \text{avec } x < y \end{array} \right.$$

N.B. : C'est un ordre total.
Rq : Dans l'arbre, cet ordre correspond à un parcours en profondeur (*depth first*).

Déf. 12 (Ordre hiérarchique)

Soient u et $v \in$ X*. On définit la relation d'*ordre hiérarchique*, notée $\triangleleft$, de la manière suivante :

$$u \triangleleft v \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & |u| < |v| \\ \text{ou} & \\ & \text{si } |u| = |v|, u \,[\, v \end{array} \right.$$

N.B. : C'est un ordre total.
Rq : Dans l'arbre, cet ordre correspond à un parcours en largeur (*breath first*).